

(3)【解】第一步:设点 M 在直线 l' 上,求点 M 的坐标

直线 l' 在曲面 C 上,且过点 $T(1,0,0)$,

设 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是直线 l' 上任意一点,直线 l' 的方向向量为 $d'=(a, b, c)$,

由 d', \overrightarrow{TM} 均为直线 l' 的方向向量,得 $\overrightarrow{TM} // d'$,

从而存在实数 t ,使得 $\overrightarrow{TM}=td'$,即 $(x_1-1, y_1, z_1)=t(a, b, c)$,

则
$$\begin{cases} x_1-1=at, \\ y_1=bt, \\ z_1=ct, \end{cases}$$
 解得 $x_1=1+at, y_1=bt, z_1=ct$,

所以点 M 的坐标为 $(1+at, bt, ct)$ 10 分

第二步:得到直线 l' 的方向向量

$\because M(x_1, y_1, z_1)$ 在曲面 C 上, $\therefore \frac{(1+at)^2}{1} + \frac{(bt)^2}{1} - \frac{(ct)^2}{4} = 1$,

整理得 $(a^2+b^2-\frac{c^2}{4})t^2+2at=0$, 12 分

由题意,对任意的 t ,有 $(a^2+b^2-\frac{c^2}{4})t^2+2at=0$ 恒成立,

$\therefore a^2+b^2-\frac{c^2}{4}=0$, 且 $2a=0$,

$\therefore c=2b$ 或 $c=-2b$,不妨取 $b=1$,则 $c=2$ 或 -2 ,

$\therefore d'=(0, 1, 2)$ 或 $d'=(0, 1, -2)$, 15 分

第三步:计算异面直线 l 与 l' 所成角的余弦值

又直线 l 的方向向量为 $d=(1, 0, 2)$,

则异面直线 l 与 l' 所成角的余弦值为 $\frac{|d \cdot d'|}{|d||d'|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$ 17 分

考法解读 在 2024 年全国新课标 I 卷中第 19 题出现了对数列新定义的考查,以新定义命题的模块可以有数列、函数与导数、圆锥曲线等. 本题以曲面方程为背景考查立体几何与双曲线的知识交汇,设题背景新颖,文字阅读量大,考查学生的阅读能力以及运用新材料解决问题的能力.

- ▶ 第(3)问 9 分,分成点 M 坐标(2 分)方向向量(5 分)异面直线所成角(2 分)三个部分给分
- ▶ 正确得到点 M 坐标,给 2 分
- ▶ 正确代入曲面 C 方程,给 1 分
- ▶ 整理化简,给 1 分,未化简不扣分
- ▶ 正确表示关系,给 1 分
- ▶ 2 个方向向量,1 个 1 分,错误不得分
- ▶ 结果正确,给 2 分;只写结果,未列式,也给分

2025 年全国高考名校名师联席命制
数学信息卷(四)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	B	A	A	C	A	B	C	ACD	AB	BD	64	$1-8a^2$	45 4 095

1. D 【热点】复数的除法运算、共轭复数的概念

【深度解析】由题知 $\bar{z} = \frac{3+5i}{1+i} = \frac{(3+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 4+i$, 则 $z=4-i$, 所以 z 的虚部为 -1 . 故选 D.

2. B 【热点】集合的交集运算、指数函数的值域

【深度解析】由题知 $A=(-2, 3]$, 则 $B=\{y|y=2^x, x \in (-2, 3]\} = \{y|2^{-2} < y \leq 2^3\} = (\frac{1}{4}, 8]$, 所以

$A \cap B = (\frac{1}{4}, 3]$. 故选 B.

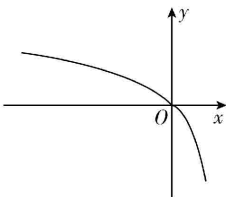
3. A 【热点】向量的坐标运算、向量垂直、向量的模

【深度解析】由题知 $c=a+2b=(1, m)+2(-2, 1)=(-3, m+2)$, 又因为 $c \perp b$, 所以 $c \cdot b = -3 \times (-2) + m+2=0$, 解得 $m=-8$, 所以 $a=(1, -8)$, 所以 $|a| = \sqrt{1^2+(-8)^2} = \sqrt{65}$. 故选 A.

4. A 【热题型】利用函数的单调性解不等式

【深度解析】因为 $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x > 0, \\ \ln(1-x), & x \leq 0, \end{cases}$ 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 且函数 $f(x)$ 的图象连续, 如图所示, 则 $f(x)$ 在

\mathbf{R} 上单调递减, 所以不等式 $f(x+3) < f(x^2+3x)$ 等价于 $x+3 > x^2+3x$, 即 $x^2+2x-3 < 0$, 解得 $-3 < x < 1$, 则原不等式的解集为 $(-3, 1)$. 故选 A.



评分细则

- ▶ 失分注意
虚部是虚数单位 i 的系数, 所以 $z=4-i$ 的虚部为 -1 , 而不是 $-i$
- ▶ 高分关键
将向量垂直转化为向量数量积为 0
- ▶ 高分关键
复合函数单调性的判断方法: 同增异减

快解 取 $x=0$, 因为 $f(3)=-2 \times 3^2=-18 < f(0)=\ln 1=0$, 所以 $x=0$ 满足不等式 $f(x+3) < f(x^2+3x)$, 排除选项 B, C, D. 故选 A.

5. C 【热题型】 利用点差法解决椭圆中弦的中点问题、椭圆的标准方程

【深度解析】 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意知 $a=2b$, 圆 M 的圆心为 $M(-2, 1)$, 设该椭圆经过圆 M 的直径 AB 的两个端点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 显然直线 AB 的斜率存在, 设直线 $AB: y-1=k(x+2)$, 即 $y=kx+2k+1$, 与椭圆方程 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 联立, 得 $(1+4k^2)x^2 + 8k(2k+1)x + 4(2k+1)^2 - 4b^2 = 0$, 则 $x_1+x_2 = \frac{-8k(2k+1)}{1+4k^2}$, 由 $x_1+x_2=-4$, 得 $\frac{-8k(2k+1)}{1+4k^2} = -4$, 解得 $k = \frac{1}{2}$. 则 $x_1x_2 = \frac{4(2k+1)^2 - 4b^2}{1+4k^2} = 8-2b^2$, 所以 $|AB| = \sqrt{1+\frac{1}{4}} \cdot |x_1-x_2| = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{8(b^2-2)} = \sqrt{10(b^2-2)} = 2\sqrt{\frac{5}{2}}$, 解得 $b^2=3$, 所以该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$.

故选 C.

一题多解 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意知 $a=2b$, 圆 M 的圆心为

$M(-2, 1)$, 半径为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 设该椭圆经过圆 M 的直径 AB 的两个端点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 M

为直径 AB 的中点, 则 $x_1+x_2=-4, y_1+y_2=2$, 由题知 $x_1 \neq x_2$, 由 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 两式作差, 得

$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0$, 即 $\frac{x_1+x_2}{a^2} + \frac{y_1+y_2}{b^2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 0$, 所以 $\frac{x_1+x_2}{a^2} + \frac{y_1+y_2}{b^2} \cdot k_{AB} =$

0 , 将 $x_1+x_2=-4, y_1+y_2=2, a=2b$ 代入, 得 $k_{AB} = \frac{1}{2}$, 则直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x+2) + 1 =$

$\frac{1}{2}x+2$, 与椭圆方程 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 联立, 得 $x^2+4x+8-2b^2=0$, 所以 $x_1+x_2=-4, x_1x_2=8-2b^2$, 所以

$|AB| = \sqrt{1+\frac{1}{4}} \cdot |x_1-x_2| = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{8(b^2-2)} = \sqrt{10(b^2-2)} =$

$\sqrt{10}$, 解得 $b^2=3$, 所以该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$. 故选 C.

快解 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意知 $a=2b$, 圆 M 的圆心为 $M(-2,$

$1)$, 设该椭圆经过圆 M 的直径 AB 的两个端点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 两式作差

得, $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2-y_2^2}{b^2} = 0$, 即 $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 所以 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{y_M-y_2}{x_M-x_2} = \frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}$. 因为

$k_{OM} = -\frac{1}{2}$, 所以 $k_{AB} = \frac{1}{2}$. 以下同一题多解.

方法速记 二级结论: 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两个不同的点, 线段 AB

的中点 $M(x_0, y_0)$, 则 $(1) \frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} \cdot k_{AB} = 0; (2) k_{AB} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}; (3) k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$ (三式实质相

同, 可相互转化).

6. A 【热题型】 利用函数的单调性和奇偶性比较大小

【深度解析】 由题知 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)=f(-x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 所以只需考虑当 $x>0$ 时 $f(x)$ 的单调性. 记 $y=e^x+e^{-x}$, 当 $x>0$ 时, $y'=e^x-e^{-x}>0$, 所以 $y=e^x+e^{-x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $\log_{0.4} 1.2 < 0$, 所以 $a=f(\log_{0.4} 1.2)=f(-\log_{0.4} 1.2)=f(\log_{0.4^{-1}} 1.2)=f(\log_{2.5} 1.2)$, 而 $0 < \log_{2.5} 1.2 < \log_{2.5} \sqrt{2.5} = \frac{1}{2}$. 令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

高分关键

观察各选项之间的区别, 代入特殊值进行逐项排除

高分关键

利用点差法求出直线 AB 的斜率

高分关键

椭圆弦长公式: 已知斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线与椭圆相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则

$$|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{(1+k^2) \cdot [(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \text{ 或 } \sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right) [(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2]}$$

高分关键

直线 OM 的斜率为 $k_{OM} =$

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$$

高分关键

先确定函数的奇偶性和单调性, 将所有值大小的比较转化为在同一单调区间上自变量的大小比较

当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 所以 $\frac{\ln 0.3}{0.3} < \frac{\ln 0.4}{0.4} \Rightarrow 0.3^{0.4} < 0.4^{0.3}$, 又因为 $0.3^{0.4} > 0.3^{0.5} = \left(\frac{3}{10}\right)^{0.5} = \frac{\sqrt{30}}{10} > \frac{1}{2}$, 所以 $0 < \log_{2.5} 1.2 < \frac{1}{2} < 0.3^{0.4} < 0.4^{0.3}$, 所以 $f(\log_{2.5} 1.2) > f(0.3^{0.4}) > f(0.4^{0.3})$, 所以 $a > b > c$. 故选 A.

一题多解 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x) = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 所以只需考虑当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的单调性. $f'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$, 当 $x > 0$ 时, $e^{-x} < 1 < e^x$, 所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $\log_{0.4} 1.2 < 0$, 所以 $a = f(\log_{0.4} 1.2) = f(-\log_{0.4} 1.2) = f(\log_{0.4^{-1}} 1.2) = f(\log_{2.5} 1.2)$, 而 $0 < \log_{2.5} 1.2 < \log_{2.5} \sqrt{2.5} = \frac{1}{2}$. 因为指数函数 $y = 0.3^x$ 为减函数, 所以 $0.3^{0.4} < 0.3^{0.3}$, 因为幂函数 $y = x^{0.3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $0.3^{0.3} < 0.4^{0.3}$, 所以 $0.3^{0.4} < 0.4^{0.3}$. 以下同深度解析.

7. B 【热点】几何体的外接球问题

【深度解析】由题知 $AD \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, 所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球, 即为以 AB, AC, AD 为同一顶点出发的三条棱的长方体的外接球, 所以外接球半径 $R = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2 + AC^2}}{2}$, 其中 $AD =$

2. 令 $AB = x, AC = y$, 则三棱锥 $A-BCD$ (以 A 为顶点) 的侧面积为 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}xy + x + y =$

6, 所以 $x + y = 6 - \frac{1}{2}xy$, 所以 $R = \frac{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + (x+y)^2 - 2xy}}{2} = \frac{\sqrt{4 + \left(6 - \frac{1}{2}xy\right)^2 - 2xy}}{2} =$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(xy)^2 - 8xy + 40} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(xy - 16)^2 - 24}$. 又因为 $x + y = 6 - \frac{1}{2}xy \geq 2\sqrt{xy}$, 即 $\frac{1}{2}(\sqrt{xy})^2 +$

$2\sqrt{xy} - 6 \leq 0$, 所以 $\frac{1}{2}(\sqrt{xy} + 6)(\sqrt{xy} - 2) \leq 0$, 所以 $-6 \leq \sqrt{xy} \leq 2$. 又因为 $\sqrt{xy} > 0$, 所以 $0 < \sqrt{xy} \leq$

2, 当且仅当 $x = y = 2$ 时, $\sqrt{xy} = 2$. 所以当 $\sqrt{xy} = 2$, 即 $xy = 4$ 时, $R_{\min} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(4 - 16)^2 - 24} = \sqrt{3}$.

此时球 O 的表面积的最小值为 $S = 4\pi R^2 = 12\pi$. 故选 B.

关键点拨 此题解题关键是 (1) 将三棱锥 $A-BCD$ 的外接球, 转化为以 AB, AC, AD 为同一顶点出发的三条棱的长方体的外接球; (2) 利用基本不等式准确求出 \sqrt{xy} 的取值范围.

8. C 【热题型】函数性质的综合应用

【深度解析】因为 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 所以 $f(x) + f(2-x) = 0$ ①.

因为 $g(1-2x) - g(1+2x) = 0$, 所以 $g(1-x) - g(1+x) = 0$ ②.

因为 $f(x) - g(1-x) = 2$ ③, 所以 $f(-x) - g(1+x) = 2$ ④.

③-④得, $f(x) - f(-x) = 0$, 所以 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数,

所以①可变形为 $f(x) + f(x-2) = 0$, 则 $f(x+2) + f(x) = 0$, 故 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由④可得 $g(x) = f(1-x) - 2 = f(x-1) - 2$, 则 $g(x)$ 也是以 4 为周期的周期函数. 因为 $f(0) = f(4) = -2$, 又 $f(0) - g(1) = 2$, 所以 $g(1) = -4$, 所以 $g(2025) = g(1) = -4$. 故选 C.

考点解读 抽象函数是指没有给出具体函数解析式, 只给出一些特征、性质或特殊关系式的函数, 通常会涉及函数的周期性、单调性、奇偶性以及图象的对称性等. 解决抽象函数问题, 可以在题目给出的条件下通过赋值法进行变形, 可适当牢记相关结论, 根据解析式快速解题, 或者匹配函数模型解题.

9. ACD 【热点】独立性检验解决实际问题、古典概型、条件概率

【深度解析】由已知得 $4a + 3b = 400$, 又 $b = 12a$, 所以 $a = 10, b = 120$.

任意一人不患疾病 A 的概率为 $\frac{3b}{400} = \frac{360}{400} = 0.9$, 故 A 正确;

任意一人不过量饮酒的概率为 $\frac{a+2b}{400} = \frac{250}{400} = \frac{5}{8}$, 故 B 错误;

任意一人在不过量饮酒的条件下不患疾病 A 的概率为 $\frac{2b}{a+2b} = \frac{240}{250} = \frac{24}{25}$, 故 C 正确;

高分关键

通过构造函数 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

判断 $0.3^{0.4}$ 和 $0.4^{0.3}$ 的大小

高分关键

通过中间量 $0.3^{0.3}$ 比较

$0.3^{0.4}$ 和 $0.4^{0.3}$ 的大小

高分关键

三条棱两两垂直对应墙角模型, 可补形为长方体, 长方体的体对角线即为三棱锥的外接球的直径

失分注意

准确求出 \sqrt{xy} 的范围, 并判断等号成立的条件

失分注意

若函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 中心对称, 则 $f(x) + f(2a-x) = 2b$

高分关键

抽象函数中的求值或求和问题, 判断其图象的对称性及周期性是解题关键

零假设为 H_0 : 过量饮酒与患疾病 A 无关, 补全 2×2 列联表如下:

	患疾病 A	不患疾病 A	合计
过量饮酒	30	120	150
不过量饮酒	10	240	250
合计	40	360	400

$$\text{则 } \chi^2 = \frac{400 \times (30 \times 240 - 120 \times 10)^2}{150 \times 250 \times 40 \times 360} = \frac{80}{3} \approx 26.67 > 10.828,$$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为过量饮酒与患疾病 A 有关, 此推断犯错误的概率不超过 0.001 , 故 **D** 正确. 故选 **ACD**.

10. AB 【热点】正弦型函数的图象和性质、函数图象的变换

【深度解析】对于 **A**, 因为 $f(x) = \sin 2x + m \cos 2x = \sqrt{1+m^2} \sin(2x+\varphi)$ (其中 $\tan \varphi = m$), 且函数 $f(x)$ 的最大值为 2 , 所以 $\sqrt{1+m^2} = 2$, 解得 $m = \pm\sqrt{3}$, 又因为 $m > 0$, 所以 $m = \sqrt{3}$, 故 **A** 正确;

对于 **B**, 解法一: 由 **A** 选项可知 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 解得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 当 $k = 2$ 时, $x = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 中心对称, 故 **B** 正确;

解法二: 由 **A** 选项可知 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 将 $x = \frac{5\pi}{6}$ 代入 $f(x)$ 的解析式, 得 $2 \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin 2\pi = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 中心对称, 故 **B** 正确;

对于 **C**, 当 $x \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left(3\pi, \frac{10\pi}{3}\right) \subseteq \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$, 根据正弦函数的图象得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故 **C** 错误;

对于 **D**, 将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $y = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 再将图象上所有点的横坐标伸长为原来的两倍 (纵坐标不变), 得到 $g(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故 **D** 错误. 故选 **AB**.

11. BD 【热点】双曲线的几何性质

【深度解析】对于 **A**, 根据题意, 渐近线 l_1 的斜率 $k_1 = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 **A** 错误;

对于 **B**, 设渐近线 l_1 的倾斜角为 θ , 则 $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, 所以 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 则两条渐近线的夹角为 2θ ,

所以 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$, 所以 $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, 故 **B** 正确;

对于 **C**, 若直线 PF 与双曲线 C 的一条渐近线垂直, 则直线 PF 的斜率 $k = \pm\sqrt{2}$, 则直线 PF 的方程为 $y = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 1 = -\sqrt{2}x + 3$ 或 $y = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 1 = \sqrt{2}x - 1$, 所以 $F\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 或 $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} |OF| \cdot y_P = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 或 $S = \frac{1}{2} |OF| \cdot y_P = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 故 **C** 错误;

对于 **D**, 由 **A** 选项可得, 双曲线 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 又 $c = \sqrt{3}$, 则 $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, 设 $Q(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1$, 即 $x_0^2 - 2y_0^2 = 2$, 双曲线 C 的两条渐近线方程为 $x \pm \sqrt{2}y = 0$, 则点 Q 到两渐近线的距离之积为 $d_1 d_2 = \frac{|x_0 + \sqrt{2}y_0|}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|x_0 - \sqrt{2}y_0|}{\sqrt{3}} = \frac{|x_0^2 - 2y_0^2|}{3} = \frac{2}{3}$, 因为

► 高分关键

独立性检验需要在得到 2×2 列联表的前提下代入公式计算

► 失分注意

$y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega \neq 0$) 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的两倍 (纵坐标不变) 得到 $y = A \sin\left(\frac{\omega}{2}x + \varphi\right)$ 的图象

► 高分关键

两直线夹角的范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

► 高分关键

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 上的点到两渐近线的距离之积为 $d_1 d_2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$

$d_1 = \frac{1}{3}$, 所以 $d_2 = 2$, 故 D 正确. 故选 BD.

12.64 【热点题】等差数列的性质及利用基本不等式求最值

【深度解析】解法一: 因为 $S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = \frac{2a_5 \cdot 9}{2} = 9a_5 = 72$, 所以 $a_5 = 8$, 所以 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 16$, 因为 $16 = a_2 + a_8 \geq 2\sqrt{a_2 a_8}$, 所以 $a_2 a_8 \leq 64$, 当且仅当 $a_2 = a_8 = 8$ 时取等号.

解法二: 因为 $S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = \frac{2a_5 \cdot 9}{2} = 9a_5 = 72$, 所以 $a_5 = 8$, 所以 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 16$, 则 $a_2 a_8 = a_2(16 - a_2) = -a_2^2 + 16a_2 = -(a_2 - 8)^2 + 64$, 故当 $a_2 = 8$ 时, $a_2 a_8$ 取得最大值 64.

解法三(基本量思想): 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \geq 0)$, 因为 $S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8d}{2} = 9a_1 + 36d = 72$, 所以 $a_1 + 4d = 8$, 即 $a_1 = 8 - 4d$, 所以 $a_2 a_8 = (a_1 + d)(a_1 + 7d) = (8 - 4d + d)(8 - 4d + 7d) = (8 - 3d)(8 + 3d) = 64 - 9d^2$, 当 $d = 0$ 时, $a_2 a_8$ 取得最大值 64.

13.1-8a² 【热题型】两角和与差的正弦公式、二倍角公式

【深度解析】由 $\sin(\alpha - \beta) = a$ 得 $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = a$, 又因为 $\sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta$, 所以 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{a}{2}$, $\sin \alpha \cos \beta = \frac{3a}{2}$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3a}{2} + \frac{a}{2} = 2a$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 8a^2$.

14.45 4 095 【热题型】新定义的理解与应用、组合数与二项式定理的结合

思路导引 (1) 由题意 $\rightarrow n$ 是 2~10 位二进制数 $\rightarrow n$ 的前 10 位中恰有两个 1, 其余位均为 0 \rightarrow 共有 C_{10}^2 个满足题意的 n 的值;
(2) $63 = (111111)_2$ 是最大的 6 位二进制数 $\rightarrow 1 \sim 63$ 的二进制数中, $f(n) \in \{1, 2, 3, \dots, 6\} \rightarrow f(n) = 1$ 时共有 C_6^1 个二进制数, $f(n) = 2$ 时共有 C_6^2 个二进制数, $f(n) = 3$ 时共有 C_6^3 个二进制数, \dots , $f(n) = 6$ 时共有 C_6^6 个二进制数 $\xrightarrow{\text{结合二项式定理}}$ 所求的值

【深度解析】(1) $n \leq 1\ 024 = 2^{10} = (1000000000)_2$, 要使 $f(n) = 2$, 则 n 是 2~10 位二进制数, 且 n 的前 10 位中恰好有两个 1, 其余位均为 0, 因为最高位必为 1, 所以有 $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_5^1 + C_6^1 + C_7^1 + C_8^1 + C_9^1 = \frac{9 \times (1+9)}{2} = 45$ 个满足题意的 n 的值.

(另解: 要使得 $f(n) = 2$, 则① n 是 2~10 位二进制数, ② n 的前 10 位中恰好有两个 1, 其余位均为 0, 故有 $C_{10}^2 = 45$ 个满足题意的 n 的值).

(2) 由于 $63 = 64 - 1 = 2^6 - 1 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (111111)_2$ 是最大的 6 位二进制数, 故 $1 \sim 63$ 的二进制数中最少 1 个 1, 最多 6 个 1, 即当 $n \in \{1, 2, 3, \dots, 63\}$ 时, $f(n) \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$.

当 $f(n) = 1$ 时, 1~6 位二进制数最高位必为 1, 其余位为 0, 故共有 $C_6^1 = 6$ 个二进制数(或者理解为前 6 位中恰有 1 个 1, 其余位均为 0);

当 $f(n) = 2$ 时, 2~6 位二进制数最高位必为 1, 其余位只有一个 1, 故共有 $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_5^1 = C_6^2$ 个二进制数(或者理解为前 6 位中恰有 2 个 1, 其余位均为 0);

当 $f(n) = 3$ 时, 3~6 位二进制数最高位必为 1, 其余位只有 2 个 1, 故共有 $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = C_6^3$ 个二进制数(或者理解为前 6 位中恰有 3 个 1, 其余位均为 0); \dots

当 $f(n) = 6$ 时, 6 位二进制数全是 1, 故共有 C_6^6 个二进制数,
所以 $3^{f(1)} + 3^{f(2)} + \dots + 3^{f(63)} = 3^1 C_6^1 + 3^2 C_6^2 + \dots + 3^6 C_6^6 = 3^0 C_6^0 + 3^1 C_6^1 + 3^2 C_6^2 + \dots + 3^6 C_6^6 - 1 = (1+3)^6 - 1 = 4^6 - 1 = 2^{12} - 1 = 4\ 095$.

关键点拨 第二空的解题关键: (1) 由 $63 = (111111)_2$ 是最大的 6 位二进制数, 得到 $f(n) \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$; (2) 分别讨论 $f(n) = 1, f(n) = 2, f(n) = 3, \dots, f(n) = 6$ 时二进制数的个数.

考法解读 本题考查组合数与二项式定理, 以二进制数为解题背景, 考查形式更加新颖, 角度更加广泛, 设题也更加综合, 做题时需要提取关键信息.

15. (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

【热题型】利用正弦定理、余弦定理解三角形及三角形面积公式

【解】(1) 第一步: 将等式右边化切为弦

$$\sin B + \tan A \cos B = \sin B + \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \cos B = \frac{\sin B \cos A + \sin A \cos B}{\cos A} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A},$$

高分关键

使用基本不等式的条件: “一正、二定、三相等”

高分关键

例如 n 是两位二进制数, 则第二位放 1; 若 n 是三位二进制数, 则后两位选一个位置放 1, 所以有 C_2^1 个; 若 n 是四位二进制数, 则后三位选一个位置放 1, 所以有 C_3^1 个; \dots ; 以此类推

第(1)问 6 分, 分成切化弦(2 分)正弦定理(2 分)角 A(2 分)三个部分给分

因为 $A+B+C=\pi$, 所以 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,

所以 $\sin B+\tan A\cos B=\frac{\sin C}{\cos A}$ 2 分

第二步:将等式左边的 2 换为 c ,将边化为角

因为 $c=2$, 所以 $\frac{2}{\sqrt{3}a}=\frac{c}{\sqrt{3}a}$, 所以由正弦定理可知 $\frac{c}{\sqrt{3}a}=\frac{\sin C}{\sqrt{3}\sin A}$, 4 分

(提示:注意到 2 可以等价替换为 c ,从而可运用正弦定理)

第三步:由 $\frac{\sin C}{\sqrt{3}\sin A}=\frac{\sin C}{\cos A}$ 得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求出角 A

所以 $\frac{2}{\sqrt{3}a}=\sin B+\tan A\cos B$ 等价于 $\frac{\sin C}{\sqrt{3}\sin A}=\frac{\sin C}{\cos A}$.

因为 $C\in(0,\pi)$, 所以 $\sin C\neq 0$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{3}\sin A}=\frac{1}{\cos A}$, 即 $\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A=\frac{\pi}{6}$ 6 分

(2) 第一步:利用三角形面积公式求出 b , 再利用余弦定理求出 a

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b\cdot 2\cdot \sin \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, 解得 $b=\sqrt{3}+1$ 8 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-a^2}{2(\sqrt{3}+1)\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $a=\sqrt{2}$ 10 分

第二步:利用三角形面积公式求出 $\sin B$

由三角形面积公式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times \sqrt{2}\times 2\sin B=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, 12 分

解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (另解:根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 求得 $\sin B$). 13 分

► 利用 $\sin(A+B)=\sin C$, 给 1 分

► 利用正弦定理将边化为角, 给 1 分

► 角 A 正确, 给 1 分

► 第(2)问 7 分, 分成求出 b (2 分) 余弦定理 (2 分) 三角形面积公式 (2 分) 结果 (1 分) 四个部分给分

► 利用余弦定理列式正确, 给 1 分; 结果正确, 给 1 分; 全部正确, 给 2 分

► 写出面积公式, 给 2 分; 结果正确, 给 1 分; 无计算过程直接求出 $\sin B$, 给 1 分

16. (1) 见解析 (2) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

【热题型】线面平行的判定、线面角的正弦值的求解

(1) 【证明】第一步:在平面 PAD 内找到一条与 EF 平行的直线

取 PD 的中点 G , 连接 GF, GA .

因为 F 为 PC 的中点, 所以 $GF\parallel DC$ 且 $GF=\frac{1}{2}DC$. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AB\parallel DC$ 且 $AB=DC$, 所以 $GF\parallel AB$ 且 $GF=\frac{1}{2}AB$. 因为 E 为 AB 的中点, 所以 $GF\parallel AE$ 且 $GF=AE$, 3 分

所以四边形 $AEFG$ 为平行四边形, 所以 $EF\parallel AG$ 4 分

第二步:证明 $EF\parallel$ 平面 PAD

又因为 $EF\not\subset$ 平面 $PAD, AG\subset$ 平面 PAD , 所以 $EF\parallel$ 平面 PAD 6 分

(2) 【解】第一步:找到直线 EF 与平面 PBC 所成的角

过点 E 作 $EQ\perp PB$ 交 PB 于点 Q , 连接 QF .

因为 $BC\perp BP, BC\perp AB, AB\cap PB=B, AB, PB\subset$ 平面 PAB , 所以 $BC\perp$ 平面 PAB 8 分

因为 $EQ\subset$ 平面 PAB , 所以 $EQ\perp BC$.

因为 $BC\cap PB=B, BC, PB\subset$ 平面 PBC , 所以 $EQ\perp$ 平面 PBC 10 分

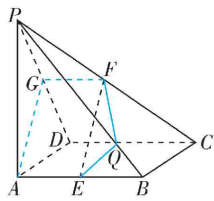
所以 $\angle EFQ$ 即为直线 EF 与平面 PBC 所成的角. 11 分

第二步:求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中, $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot PB=\frac{15}{2}$, 因为 $BC=3$, 所以 $PB=5$.

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $AB=4, PB=5$, 所以 $PA=\sqrt{PB^2-AB^2}=3$.

因为 $PA\subset$ 平面 PAB , 所以 $BC\perp PA$, 又 $AD\parallel BC$, 所以 $AD\perp PA$. 在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中, $PA=AD=3, G$ 为



► 第(1)问 6 分, 分成线段平行且相等 (3 分) 线线平行 (1 分) 线面平行 (2 分) 三个部分给分

► 得出 $GF\parallel AE$ 且 $GF=AE$, 给 2 分
► 得出 $EF\parallel AG$, 给 1 分

► 结论正确, 给 2 分

► 第(2)问 9 分, 分成找线面角 (5 分) EF, EQ 的长度 (2 分) 线面角的正弦值 (2 分) 三个部分给分

► 找到线面角, 给 1 分

PD 中点, 所以 $AG=EF=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 12 分

因为 $\angle PAB=\angle EQB=90^\circ$, $\angle ABP=\angle QBE$, 所以 $\triangle EQB\sim\triangle PAB$, 所以 $\frac{EQ}{EB}=\frac{PA}{PB}$, 即 $\frac{EQ}{2}=\frac{3}{5}$, 解得 $EQ=\frac{6}{5}$, 13 分

所以在 $\text{Rt}\triangle EQF$ 中, $\sin\angle EFQ=\frac{EQ}{EF}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, 14 分

所以直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 15 分

一题多解 (1)【证明】第一步: 证明 PA, AB, AD 两两垂直, 建立空间直角坐标系, 写出相关点的坐标

取 PD 的中点 G , 连接 GA .

因为 $BC\perp BP, BC\perp AB, AB\cap PB=B, AB, PB\subset$ 平面 PAB , 所以 $BC\perp$ 平面 PAB . 又 $AD\parallel BC$, 所以 $AD\perp$ 平面 PAB .

因为 $PA\subset$ 平面 PAB , 所以 $AD\perp PA$, 又 $PA\perp AB, AB\perp AD$, 则 PA, AB, AD 两两垂直. 2 分

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中, $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times BC\times PB=\frac{15}{2}$, 因为 $BC=3$, 所以 $PB=5$.

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $AB=4, PB=5$, 所以 $PA=\sqrt{PB^2-AB^2}=3$ 3 分

如图, 以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,3,0), D(0,3,0), P(0,0,3), E(2,0,0), F(2,\frac{3}{2},\frac{3}{2}), G(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, 4 分

第二步: 证明 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EF}$

则 $\overrightarrow{AG}=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}), \overrightarrow{EF}=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EF}$, 所以 $EF\parallel AG$, 5 分

第三步: 证明 $EF\parallel$ 平面 PAD

又因为 $EF\not\subset$ 平面 $PAD, AG\subset$ 平面 PAD , 所以 $EF\parallel$ 平面 PAD 6 分

(2)【解】第一步: 求平面 PBC 的法向量

由 (1) 得 $\overrightarrow{BC}=(0,3,0), \overrightarrow{BP}=(-4,0,3), \overrightarrow{EF}=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, 9 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3y=0, \\ -4x+3z=0, \end{cases}$ 令 $x=3$, 得 $y=0, z=4$, 所以 $\boldsymbol{n}=(3,0,4)$, 所以平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,0,4)$ 12 分

第二步: 求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值

设直线 EF 与平面 PBC 所成的角为 θ ,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF}, \boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{n}|}=\frac{6}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 5}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, 14 分

所以直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 15 分

- ▶ 求出 EF , 给 1 分
- ▶ 求出 EQ , 给 1 分
- ▶ 求出线面角的正弦值, 给 1 分
- ▶ 写出结论, 给 1 分
- ▶ 第 (1) 问 6 分, 分成建系写坐标 (4 分) 结论 (2 分) 两个部分给分
- ▶ 辅助线标注, 给 1 分
- ▶ 建系, 给 2 分, 若无必要证明, 只给 1 分
- ▶ 写出点坐标, 给 1 分
- ▶ 必要步骤说明及线线平行, 给 1 分
- ▶ 得出结论, 给 1 分
- ▶ 第 (2) 问 9 分, 分成向量坐标 (3 分) 法向量 (3 分) 所成角的正弦值 (3 分) 三个部分给分
- ▶ 正确得到法向量, 给 3 分, 须有必要步骤, 否则只给 1 分, 其他合理答案也给分
- ▶ 公式写对, 给 1 分; 求出 $\sin\theta$, 给 1 分
- ▶ 写出结论, 给 1 分
- ▶ 第 (1) 问 7 分, 分成概率 (4 分) 分布列与期望 (3 分) 两个部分给分
- ▶ 写出 X 的所有可能取值, 给 1 分
- ▶ 3 个概率, 1 个 1 分, 写错不得分

17. (1) 见解析 $\frac{37}{18}$ (2) 见解析

【热点】离散型随机变量的分布列和期望、独立事件概率的乘法公式

【解】(1) 第一步: 求出 X 取每个可能值的概率

由题意知, X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 1 分

则 $P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$,

$P(X=3)=1-P(X=1)-P(X=2)=1-\frac{1}{3}-\frac{5}{18}=\frac{7}{18}$, 4 分

第二步:写出分布列,求出期望

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

..... 5 分
 所以 $E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{7}{18}=\frac{37}{18}$ 7 分

(2) 第一步:分 A_1 一人参赛全胜获得擂主, A_1, A_2 两人参赛获得擂主, A_1, A_2, A_3 三人参赛获得擂主三种情况分别求出概率

$p=\frac{2}{3}$ 满足题意. 8 分

理由如下:

分三种情况:

① A_1 一人参赛全胜获得擂主,该事件发生的概率设为 P_1 , 则 $P_1=\left(\frac{1}{3}\right)^3$, 9 分

② A_1, A_2 两人参赛获得擂主,该事件发生的概率设为 P_2 ,

则 $P_2=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{38}{3^3\times2^3}$, 10 分

③ A_1, A_2, A_3 三人参赛获得擂主,该事件发生的概率设为 P_3 ,

则 $P_3=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}p^3+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)p^2+\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]p$, 12 分

第二步:由甲队获得擂主的概率大于 $\frac{1}{2}$, 得到关于 p 的不等式, 将 $p=\frac{2}{3}$ 代入不等式验证

因为 $P_1+P_2=\frac{38+2^3}{3^3\times2^3}=\frac{23}{108}$,

所以要使甲队获胜的概率大于 $\frac{1}{2}$, 即 $P_1+P_2+P_3>\frac{1}{2}$, 则 $P_3>\frac{31}{108}$, 化简得 $36p^3+30p^2+19p>31$, 13 分

当 $p=\frac{2}{3}$ 时, 代入可得 $\frac{110}{3}>31$, 满足题意. 15 分

18. (1) $x-2y-1=0$ (其他形式也给分) (2) ①0 ②3

【热题型】导数的几何意义、利用导数研究函数的极值和零点问题

思路导引 (1) $f(x)\rightarrow f'(x)\rightarrow f(1)$ 和 $f'(1)\rightarrow$ 切线方程;

(2) ① $f'(x)\rightarrow$ 令 $g(x)=x^2+2(1-a)x+1\rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\leq 0 \text{ 时 } \rightarrow f(x) \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 上单调递增 } \rightarrow f(x) \text{ 无极值} \\ \Delta>0 \text{ 时 } \rightarrow \frac{g(x)=0}{x_1<x_2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1x_2=1 \\ x_1+x_2=2(a-1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a<0 \text{ 时 } f(x) \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 上单调递增 } \rightarrow f(x) \text{ 无极值} \\ a>2 \text{ 时 } \rightarrow f(x) \text{ 的单调性 } \rightarrow f(x) \text{ 有极大值 } f(x_1) \text{ 和极小值 } f(x_2) \end{array}\right\} \rightarrow x_1x_2=1 \end{array}\right.$$

$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=0$;

② $x_1x_2=1, 0<x_1<x_2\rightarrow 0<x_1<1<x_2$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ 的单调性及变化趋势} \\ f(1)=0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{函数零点存在定理}} \text{零点个数}$$

【解】(1) 第一步: 求出 $f(1)$ 和 $f'(1)$

由题可得, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}$ 2 分

写出分布列, 给 1 分, 错误不给分

列式正确, 给 1 分; 期望正确, 给 1 分

第 (2) 问 8 分, 分成概率 (5 分) 验证 (3 分) 两个部分给分

点明 $p=\frac{2}{3}$ 满足题意, 给 1 分

3 种情况概率, 分别对应 1 分、1 分、2 分, 列式正确或结果正确均给分

不等式关系正确, 给 1 分

结论验证, 给 2 分

第 (1) 问 5 分, 分成求导 (2 分) 切线方程 (3 分) 两个部分给分

当 $a=1$ 时, $f(1)=\ln 1-\frac{1-1}{1+1}=0, f'(1)=\frac{1}{1}-\frac{2}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}$, 4 分

第二步: 写出切线方程

故切点为 $(1, 0)$, 切线在该点处的斜率为 $f'(1)=\frac{1}{2}$, 故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $x-2y-1=0$ 5 分

(2) ① 第一步: 求导, 判断导函数的符号

由 (1) 得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$, 因为分母 $x(x+1)^2>0$ 在定义域内恒成立, 所以导函数的符号取决于分子的符号, 令 $g(x)=x^2+2(1-a)x+1$, 其对应一元二次方程的判别式 $\Delta=4(1-a)^2-4=4a(a-2)$ 6 分

第二步: 讨论 $\Delta \leq 0$ 的情况

若 $\Delta \leq 0$, 此时 $0 \leq a \leq 2$, 则 $g(x) \geq 0$ 且不恒为 0, 所以 $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 没有极值点. 7 分

第三步: 讨论 $\Delta > 0$ 的情况

若 $\Delta > 0$, 此时 $a < 0$ 或 $a > 2$, 则 $g(x)=0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$,

由一元二次方程根与系数的关系可得 $\begin{cases} x_1+x_2=2(a-1), \\ x_1x_2=1>0, \end{cases}$ 则 x_1, x_2 同号.

当 $a < 0$ 时, $x_1+x_2 < 0$, 两根均为负数, 则 $g(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 没有极值点; 9 分

当 $a > 2$ 时, $x_1+x_2 > 0$, 两根均为正数, 故当 $0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $g(x) > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$, 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $g(x) < 0$, 所以 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 (x_1, x_2) , 故 $f(x)$ 有极大值点 x_1 , 极小值点 x_2 .

故 $a > 2$ 时, $f(x)$ 恰有 1 个极大值点和 1 个极小值点. 11 分

第四步: 利用 $x_1x_2=1$ 得到极大值与极小值之和

$$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=\ln x_1-a\left(\frac{x_1-1}{x_1+1}\right)+\ln \frac{1}{x_1}-a\left(\frac{\frac{1}{x_1}-1}{\frac{1}{x_1}+1}\right)=\ln x_1-a\left(\frac{x_1-1}{x_1+1}\right)-\ln x_1-a\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\right)=0,$$

故极大值与极小值的和为 0. 13 分

② 由 ① 得 $x_1x_2=1$ 且 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 由 $f(1)=0$ 及 $f(x)$ 的单调性, 结合函数零点存在定理可判断零点个数

由 ① 知, $x_1x_2=1, 0 < x_1 < x_2$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_2$,

又由 ① 知, $f(x)$ 在 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减,

因为 $f(1)=0$, 所以 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$,

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

故 $f(x)$ 在 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ 上各有一个零点, 又 $f(1)=0$, 所以 $f(x)$ 有 3 个零点. 17 分

关键点拨 第 (2) 问 ① 的解题关键: (1) 令 $g(x)=x^2+2(1-a)x+1$, 讨论 $\Delta \leq 0$ 和 $\Delta > 0$ 的情况; (2) 当 $\Delta > 0$ 时需要讨论两根的正负, 注意根与系数关系的应用.

19. (1) $x^2=2y$ (2) $y_n=2^{2^n-1}$ (3) $T_n=2^{2^n-n-1}$

【热风向】抛物线的几何性质、解析几何与数列的综合

思路导引 (1) 设圆心的坐标为 $(x, y) \rightarrow$ 列方程 \rightarrow 化简方程 \rightarrow 圆心的轨迹方程 C ;

(2) 设 $A_n(x_{a_n}, y_{a_n}), B_n(x_{b_n}, y_{b_n}), A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), F_n(x_n, y_n) \rightarrow k_{AA_n}, k_{BB_n} \rightarrow AA_n, BB_n$ 的

$$\text{方程} \xrightarrow{\text{令 } x=0} \begin{cases} -2y_n=x_{a_n}x_a \\ -2y_n=x_{b_n}x_b \end{cases} \xrightarrow{x_ax_b=-1} \begin{cases} -4y_n^2=x_{a_n}x_{b_n} \\ -4y_n^2=x_{a_n}x_{b_n} \end{cases} \rightarrow y_{n+1}=2y_n^2 \rightarrow \{\log_2 y_n+1\} \text{ 是等比数列}$$

$\rightarrow \log_2 y_n=2^{n-1}-1 \rightarrow y_n$ 的通项;

(3) $\log_2 T_n=\log_2 y_1+\log_2 y_2+\cdots+\log_2 y_n=2^n-1-n \rightarrow T_n$

► 求出 $f(1)$ 和 $f'(1)$, 各给 1 分

► 切线方程, 给 1 分, 其他合理形式也给分

► 第 (2) 问 12 分, 分成 ① (8 分) ② (4 分) 两个部分给分

► 求导正确, 给 1 分, 未通分也给分

► $\Delta \leq 0$ 情况讨论正确, 给 1 分

► 得到 x_1, x_2 同号, 给 1 分

► 讨论当 $a < 0$ 时, 给 1 分

► 讨论当 $a > 2$ 时, 给 2 分: 得到 $f(x)$ 的单调性, 给 1 分; 说明有极大值和极小值, 给 1 分

► 列式正确, 给 1 分; 结果正确, 给 1 分; 没有化简过程, 结果正确, 也给分

► 单调性正确, 每个给 1 分; 函数值的变化趋势正确, 给 1 分

► 零点个数正确, 给 1 分

【解】(1) 第一步: 设动圆的圆心坐标为 (x, y) , 根据条件列出方程

设动圆的圆心坐标为 (x, y) , 则由题意可知 $\sqrt{|y|^2+1} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, 1 分

第二步: 化简方程

整理得 $x^2=2y$, 故动圆圆心的轨迹 C 的方程为 $x^2=2y$ 2 分

(2) 第一步: 设点 A_n, B_n, A, B 的坐标, 求出 k_{AA_n}

设 $A_n(x_{a_n}, y_{a_n}), B_n(x_{b_n}, y_{b_n}), A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), F_n(x_n, y_n)$, 易知 $x_{a_n} \neq x_a, x_{b_n} \neq x_b, y_n > 0$.

由题可知 $x_{a_n}^2=2y_{a_n}, x_{b_n}^2=2y_{b_n}$,

两式作差可得 $(x_{a_n}+x_a)(x_{a_n}-x_a)=2(y_{a_n}-y_a) \Rightarrow \frac{y_{a_n}-y_a}{x_{a_n}-x_a} = \frac{x_{a_n}+x_a}{2}$,

所以 $k_{AA_n} = \frac{y_{a_n}-y_a}{x_{a_n}-x_a} = \frac{x_{a_n}+x_a}{2}$, 同理可得 $k_{BB_n} = \frac{x_{b_n}+x_b}{2}, k_{A_nB_n} = \frac{x_{a_n}+x_{b_n}}{2}$, 4 分

第二步: 写出直线 AA_n 和 BB_n 的方程, 并令 $x=0$

所以直线 AA_n 的方程为 $y-y_a = \frac{x_{a_n}+x_a}{2}(x-x_a)$,

同理, 直线 BB_n 的方程为 $y-y_b = \frac{x_{b_n}+x_b}{2}(x-x_b)$,

结合点 $F_n(x_n, y_n)$ 在两直线上, 令 $x=0$, 得 $\begin{cases} -2y_n = x_{a_n}x_a, \\ -2y_n = x_{b_n}x_b. \end{cases}$ 6 分

第三步: 由 $x_ax_b=-1$ 得到 $-4y_n^2=x_{a_n}x_{b_n}$

又因为直线 AB 过点 $(0, \frac{1}{2})$, 所以设直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$ (提示: 直线 AB 的斜率显然存在),

由 $\begin{cases} y=kx+\frac{1}{2}, \\ x^2=2y, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2kx-1=0, \Delta>0$, 所以 $x_ax_b=-1$,

所以由 $\begin{cases} -2y_n = x_{a_n}x_a, \\ -2y_n = x_{b_n}x_b, \end{cases}$ 可知 $(-2y_n)^2 = x_{a_n}x_{b_n}x_ax_b$, 所以 $-4y_n^2 = x_{a_n}x_{b_n}$ ①. 8 分

第四步: 写出直线 A_nB_n 的方程, 令 $x=0$, 得 y_{n+1} 与 y_n 的关系

又因为直线 A_nB_n 的方程为 $y-y_{a_n} = \frac{x_{a_n}+x_{b_n}}{2}(x-x_{a_n})$,

结合点 $F_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ 在直线 A_nB_n 上, 令 $x=0$, 得 $-2y_{n+1} = x_{a_n}x_{b_n}$, ②

由①②得, $y_{n+1} = 2y_n^2$, 10 分

第五步: 构造等比数列, 求 $\{y_n\}$ 的通项公式

等式两边同时取对数可得 $\log_2 y_{n+1} = 2 \log_2 y_n + 1 \Rightarrow \log_2 y_{n+1} + 1 = 2(\log_2 y_n + 1)$,

由题可知 $y_1=1$,

所以数列 $\{\log_2 y_n + 1\}$ 是以 $\log_2 y_1 + 1 = 1$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

所以 $\log_2 y_n + 1 = 2^{n-1}$,

解得 $y_n = 2^{2^{n-1}-1}$ 13 分

(3) 第一步: 求出 $\log_2 y_n = 2^{n-1} - 1$

由(2)知, $\log_2 y_n = 2^{n-1} - 1$, 14 分

第二步: 求出 $\log_2 T_n$, 从而得到 T_n

(提示: 求 $\log_2 T_n = \log_2 y_1 + \log_2 y_2 + \dots + \log_2 y_n$)

又因为 $\log_2 T_n = \log_2 y_1 y_2 \dots y_n = \log_2 y_1 + \log_2 y_2 + \dots + \log_2 y_n = (2^{1-1} - 1) + (2^{2-1} - 1) + \dots + (2^{n-1} - 1) =$

$(2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - n = \frac{1-2^n}{1-2} - n = 2^n - 1 - n$, 16 分

所以 $\log_2 T_n = 2^n - 1 - n$, 故 $T_n = 2^{2^n - 1 - n}$ 17 分



考法解读 本题以动圆圆心的轨迹方程为设题背景, 以抛物线为载体, 通过直线与抛物线的交点以及直线与 y 轴交点, 依次构造新的点. 考查学生对于解析几何问题的处理能力以及对于等比数列知识的掌握, 难度较大, 较为综合.

► 第(1)问 2 分, 按照轨迹方程正确与否给分

► 列式正确, 给 1 分, 或者文字说明, 均可给分

► 轨迹方程正确, 给 1 分

► 第(2)问 11 分, 分成斜率(2 分)直线方程(2 分)方程联立(2 分)递推化简(5 分)四个部分给分

► 点差法, 给 1 分

► 写出直线斜率, 给 1 分

► 直线方程, 1 个 1 分

► 方程联立正确, 给 2 分

► 递推关系正确, 给 2 分

► 数列通项公式正确, 给 3 分
注: 不深究过程, 注重结论

► 第(3)问 4 分, 分成 $\log_2 T_n$ (3 分)结论(1 分)两个部分给分
► 等价变形, 给 1 分

► 全部正确, 给 2 分; 列式正确, 给 1 分; 结果正确, 给 1 分

► 结论正确, 给 1 分